

DLR-IB-FA-BS-2018-117

**Grafische Benutzeroberfläche für
das Versagenskriterium nach Cuntze
im ebenen Spannungszustand**

Wissenschaftlicher Bericht

Josef Koord



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

DLR-IB-FA-BS-2018-117

Grafische Benutzeroberfläche für das Versagenskriterium nach Cuntze im ebenen Spannungszustand

Zugänglichkeit:

Stufe 2 DLR intern zugänglich: analog „allgemein zugänglich“, allerdings ist dieser in ELIB nur für intern zugänglich abzulegen.

Braunschweig, Juli, 2018

Der Bericht umfasst: 34 Seiten

Abteilungsleiter:

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne

Josef Koord



DLR

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt

Dokumenteigenschaften

Titel	Grafische Benutzeroberfläche für das Versagenskriterium nach Cuntze im ebenen Spannungszustand
Betreff	-
Institut	FA-FLB
Erstellt von	Josef Koord
Beteiligte	-
Geprüft von	
Freigabe von	
Datum	18.07.2018
Version	1.0
Dateipfad	-

Inhaltsverzeichnis

Dokumenteigenschaften	2
1. Einleitung.....	5
2. Das Cuntze Versagenskriterium	6
2.1. Invariantenschreibweise.....	6
2.2. Versagensarten nach Cuntze	7
2.3. Bestimmung der Cuntze Parameter.....	10
3. Implementierung des Cuntze Kriteriums in 2D.....	11
3.1. Das Cuntze Kriterium für den ebenen Spannungszustand.....	11
3.2. Bestimmung der Bruchkurven (2D).....	12
3.2.1. Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_1)$	12
3.2.2. Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_2)$	14
3.2.3. Bruchkurve $\sigma_2 = f(\sigma_1)$	15
3.3. Bestimmung des Bruchkörpers (2D)	16
3.4. Visualisierung des Belastungsvektors in den Bruchebenen.....	19
3.4.1. Projektion auf die Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_1)$	20
3.4.2. Projektion auf die Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_2)$	21
3.4.3. Projektion auf die Bruchkurve $\sigma_2 = f(\sigma_1)$	22
3.5. Bestimmung der Materialanstressungen und Reservefaktoren.....	23
3.5.1. Reservefaktor in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$	23
3.5.2. Anstrengung in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$	23
3.5.3. Reservefaktor in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$	23
3.5.4. Anstrengung in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$	24
3.5.5. Reservefaktor in der Bruchebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$	24
3.5.6. Anstrengung in der Bruchebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$	24
4. Grafische Benutzeroberfläche	25
4.1. Materialdateneingabe	26
4.2. Berechnung der Materialanstressungen	28
4.3. Darstellung der Bruchkurven.....	29
4.4. Darstellung des Bruchkörpers	31
5. Zusammenfassung	33
Abbildungsverzeichnis	34
Tabellenverzeichnis	34
Literaturverzeichnis	34

1. Einleitung

Dieser Bericht beschreibt die Entwicklung einer grafischen Benutzeroberfläche (engl. Graphical User Interface, GUI) für das Versagenskriterium nach Cuntze.

Die zu entwickelnde GUI soll dabei in der Lage sein Materialanstressungen, Bruchkurven sowie den Bruchkörper im ebenen Spannungszustand (2D) zu berechnen und in geeigneter Form zu visualisieren. Die Materialdateneingabe soll dabei sowohl manuell mit nutzerspezifischen Daten, als auch durch die Auswahl von Daten aus einer in der GUI integrierten Materialdatenbank möglich sein. Bei der Darstellung der Bruchkurven ist die Möglichkeit zur Eingabe von Datenpunkten zu gewährleisten, damit experimentell ermittelte Daten in den jeweiligen Bruchebenen mit den analytisch nach Cuntze bestimmten Bruchkurven vergleichend betrachtet werden können. Weiterhin sollen nutzerspezifische Lastfälle in den Diagrammen der betrachteten Bruchkurven in geeigneter Form visualisiert werden. Dabei sind dem Nutzer die Materialanstressung sowie der Reservefaktor anzuzeigen. Für eine nutzerfreundliche Bedienung ist darauf zu achten, dass grundlegende Informationen zum Cuntze Kriterium in geeigneter Form und an geeigneter Stelle bereitgestellt werden. Insbesondere ist dabei auf die unterschiedlichen Versagensmodi nach Cuntze und die jeweils zugrundeliegenden Formeln einzugehen.

2. Das Cuntze Versagenskriterium

Das Versagensverhalten orthotroper Faserverbundwerkstoffe unterscheidet sich grundlegend vom Verhalten isotroper Metalle. Aufgrund ihrer inhomogenen Struktur weisen Faserverbundwerkstoffe im Vergleich zu Metallen eine deutlich größere Abhängigkeit vom Fertigungsprozess auf, was zu größeren Streuungen in den Materialeigenschaften führt. Dies erschwert die Beschreibung der Versagensmechanismen im Material sowie die Vorhersage von Materialversagen [1].

Im Rahmen der World Wide Failure Exercise (WWFE) ist eine große Streuung in der Vorhersagefähigkeit etablierter und neuartiger Versagenskriterien deutlich geworden. Diese Erkenntnis zeigt die Notwendigkeit auf, mehrachsige Spannungszustände und Versagensmoden, und in der Folge die Interaktion unterschiedlicher Versagensmoden akkurat beschreiben zu können. Dazu ist es erforderlich, die auf mikromechanischer Ebene aktiven Phänomene zu erfassen [1].

Eine weitere Erkenntnis aus den WWFE-I und -II (I: 2D Versagen, II: 3D Versagen) ist die Feststellung der außerordentlich guten Vorhersagegenauigkeit des Cuntze Versagenskriteriums (Cuntze Failure Mode Concept) [1,3-4]. Das Cuntze Kriterium ist ein phänomenologisches, invariantenbasiertes Versagenskriterium, das für die Versagensvorhersage in isotropen, transversal-isotropen sowie rhombisch-isotropen Materialien verwendet werden kann. Dabei stellt dieses Kriterium eine globale Formulierung zur Verfügung, die aus unabhängigen Versagensmoden zusammengesetzt ist, ohne die Schwächen globaler Versagenskriterien aufzuweisen, die zum Teil unabhängige Versagensmodi mathematisch kombinieren (Maximum-Strain, Maximum-Stress, Tsai-Hill, Tsai-Wu) [2].

Das Cuntze Kriterium zeichnet sich durch den Grundgedanken aus, Versagensmoden strikt zu trennen. Ein Versagensmode beschreibt nach Cuntze einen bestimmten Versagensmechanismus. Jeder Versagensmechanismus ist durch ein Versagenskriterium erfasst, welches wiederum mit nur einer Materialfestigkeit verknüpft ist. Die Interaktion der verschiedenen Moden liefert schließlich das globale Versagenskriterium in Form einer Summengleichung [2].

2.1. Invariantenschreibweise

Es gibt eine Reihe unterschiedlicher Spannungsgrößen, die für die Vorhersage von Festigkeitsversagen herangezogen werden können. Für isotrope Materialien sind es die Größen des Spannungstensors im jeweils zugrundeliegenden Koordinatensystem, die Hauptspannungen in den Hauptachsrichtungen oder die Mohr'schen Spannungen. Für transversal-isotrope Lamine werden für die Versagensvorhersage nach Cuntze die Spannungen im Laminatkoordinatensystem genutzt, siehe dazu Abbildung 2-1.

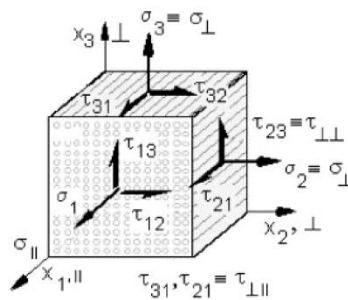


Abbildung 2-1 Spannungen eines räumlichen Kontinuums bei transversaler Isotropie [5]

Cuntze verwendet in seiner Formulierung die Spannungsinvarianten einer unidirektionalen (UD) Schicht. Während bei isotropen Materialien zwei Invarianten ausreichen, um die Verformung und Verzerrung eines Volumenkörpers zu beschreiben, sind es bei transversal-isotropen Materialien fünf Invarianten. Die Ursache liegt in der unterschiedlichen Anzahl der auftretenden Versagensformen. Isotrope Materialien versagen durch Normal- und Schubbruch, wohingegen eine transversal-isotrope UD-Lage in fünf verschiedenen Versagensmoden versagen kann [3]. Die Invarianten nach Cuntze für eine transversal-isotrope UD-Lage lauten wie folgt:

$$I_1 = \sigma_1$$

$$I_2 = \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_3 = \tau_{21}^2 + \tau_{31}^2$$

$$I_4 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2$$

$$I_5 = (\sigma_2 - \sigma_3)(\tau_{31}^2 - \tau_{21}^2) - 4\tau_{23}\tau_{31}\tau_{21}$$

2.2. Versagensarten nach Cuntze

Das Cuntze Kriterium betrachtet fünf Versagensarten. Wie die Kriterien nach Hashin oder Puck, unterscheidet auch Cuntze zunächst zwischen Faserbruch (engl. Fiber failure, FF) und Zwischenfaserbruch (engl. Inter fiber failure, IFF). Diese Moden werden im Weiteren nach dem Spannungszustand differenziert, der Versagen hervorruft. Somit folgen zug- und druckbedingte Versagensmoden bei Faserbruch und zug-, druck- sowie schubbedingte Versagensmoden bei Zwischenfaserbruch. In Abbildung 2-2 sind die fünf Versagensmoden nach Cuntze dargestellt. Diesen Versagensmoden können jeweils die Versagensarten Normalbruch (engl. Normal fracture, NF) und Scherbruch (engl. Shear fracture, SF) zugeordnet werden [2].

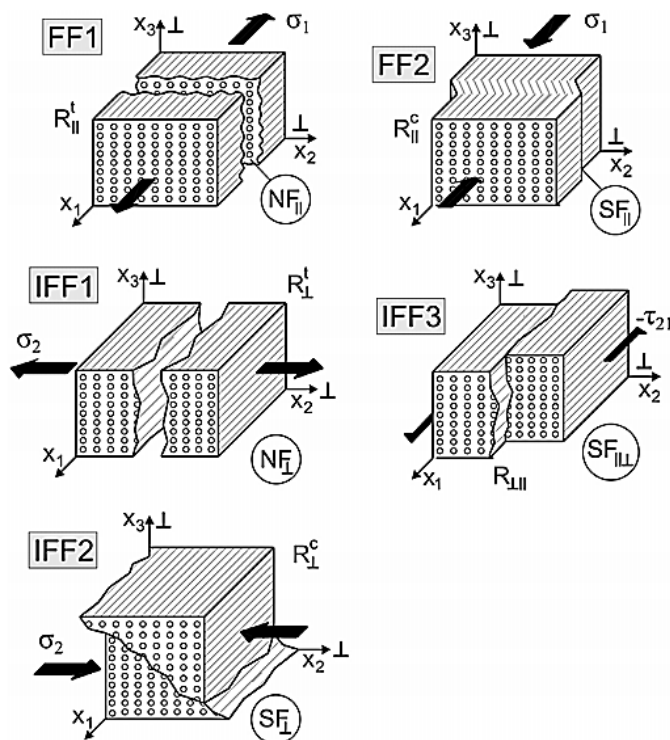


Abbildung 2-2 Versagensmodi für transversal-isotropes, sprödes Material [5]

Jeder Versagensmode ist mathematisch beschrieben durch die Invarianten des transversal-isotropen Materials, die dem jeweiligen Mode zugrundeliegender Materialfestigkeit sowie den internen Reibparametern, die die physikalischen Phänomene im Material erfassen. Die Indizes \perp und \parallel stehen für fasersenkrechte bzw. faserparallele Eigenschaften, während c und t Druck- bzw. Zugbelastung beschreiben. Das Cuntze Kriterium mit den modeweisen Materialanstressungen Eff^{mode} für einen dreidimensionalen Spannungszustand lautet wie folgt:

$$FF1: Eff^{\parallel\sigma} = \frac{\sigma_{eq}^{\parallel\sigma}}{R_{\parallel}^t} \quad \text{mit} \quad \sigma_{eq}^{\parallel\sigma} = \varepsilon E_{\parallel}^t,$$

$$FF2: Eff^{\parallel\tau} = \frac{\sigma_{eq}^{\parallel\tau}}{R_{\parallel}^c} \quad \text{mit} \quad \sigma_{eq}^{\parallel\tau} = \varepsilon E_{\parallel}^c,$$

$$IFF1: Eff^{\perp\sigma} = \frac{\sigma_{eq}^{\perp\sigma}}{R_{\perp}^t} \quad \text{mit} \quad \sigma_{eq}^{\perp\sigma} = \left[(\sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2} \right],$$

$$IFF2: Eff^{\perp\tau} = \frac{\sigma_{eq}^{\perp\tau}}{R_{\perp}^c} \quad \text{mit} \quad \sigma_{eq}^{\perp\tau} = \left[b_{\perp\perp} \cdot \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2} + (b_{\perp\perp} - 1)(\sigma_2 + \sigma_3) \right],$$

$$IFF3: Eff^{\perp\parallel} = \frac{\sigma_{eq}^{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{eq}^{\perp\parallel} = \left(\frac{\sqrt{b_{\perp\parallel}^2 I_{23-5}^2 + 4 R_{\perp\parallel}^2 (\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2)^2 + b_{\perp\parallel} I_{23-5}}}{2 R_{\perp\parallel}^3} \right)^{0.5},$$

und $I_{23-5} = 2\sigma_2\tau_{21}^2 + 2\sigma_3\tau_{31}^2 + 4\tau_{23}\tau_{31}\tau_{21}$. Die Indizes σ und τ kennzeichnen die treibende Größe in den äquivalenten Spannungen, die zu den Versagenstypen Normal- und Schubbruch gehören. In den Faserbruchmoden erfolgt die Bestimmung der äquivalenten Spannung mit Hilfe der Filamentspannung. Auf diese Weise wird berücksichtigt, dass Faserbrüche oftmals bereits vor Erreichen der Auslegungslasten des homogenisierten Materials auftreten. So können Faserbrüche auch ohne eine äußere Last in Faserrichtung auftreten, wenn nämlich eine biaxiale Druckbelastung in Kombination mit dem Poisseneffekt vorliegt [2].

Die verschiedenen Versagensmoden lassen sich zu einem globalen Kriterium für Versagen im Laminat zusammenfassen. Die Interaktion der Materialanstressungen zur Gesamtanstressung Eff wird mit dem Interaktionsexponenten m beschrieben. Diese Größe sollte experimentell bestimmt werden. Mit Hilfe des Interaktionsexponenten ist es möglich, die Schädigung aus jedem aktiven Mode in angemessener Höhe zu berücksichtigen. Die globale Materialanstressung Eff ergibt sich in der Folge zu:

$$Eff^m = \sum_1^5 Eff^{mode} = \left(\frac{\sigma_{eq}^{||\sigma}}{R_{||}^t}\right)^m + \left(\frac{\sigma_{eq}^{||\tau}}{R_{||}^c}\right)^m + \left(\frac{\sigma_{eq}^{\perp\sigma}}{R_{\perp}^t}\right)^m + \left(\frac{\sigma_{eq}^{\perp\tau}}{R_{\perp}^c}\right)^m + \left(\frac{\sigma_{eq}^{\perp||}}{R_{\perp||}}\right)^m$$

Bei der Betrachtung von Faserverbundlaminaten ist oftmals nur der zweidimensionale Lastfall von Interesse, da in den meisten Fällen der ebene Spannungszustand vorausgesetzt werden kann. Mit dieser Vereinfachung entfallen alle Termine mit Komponenten in Dickenrichtung, so dass sich das Cuntze Kriterium für den ebenen Spannungszustand wie folgt verkürzt beschreiben lässt [8]:

$$\begin{aligned} \text{FF1: } Eff^{||\sigma} &= \sigma_{eq}^{||\sigma} / R_{||}^t = \frac{\sigma_1}{R(1,t)}, & \text{für } \sigma_1 \geq 0 \\ \text{FF2: } Eff^{||\tau} &= \sigma_{eq}^{||\tau} / R_{||}^c = \frac{\sigma_1}{R(1,c)}, & \text{für } \sigma_1 < 0 \\ \text{IFF1: } Eff^{\perp\sigma} &= \sigma_{eq}^{\perp\sigma} / R_{\perp}^t = \frac{\sigma_2}{R(2,t)}, & \text{für } \sigma_2 \geq 0 \\ \text{IFF2: } Eff^{\perp\tau} &= \sigma_{eq}^{\perp\tau} / R_{\perp}^c = \frac{\sigma_2}{R(2,c)}, & \text{für } \sigma_2 < 0 \\ \text{IFF3: } Eff^{\perp||} &= \sigma_{eq}^{\perp||} / R_{\perp||} = \frac{\tau_{21}}{R(2,1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2} \end{aligned}$$

Die Interaktion zur Bestimmung der globalen Materialanstressung (Gesamtmaterialanstressung) Eff erfolgt analog zur Betrachtung im dreidimensionalen Fall.

2.3. Bestimmung der Cuntze Parameter

Für transversal-isotrope Materialien erfordert die Anwendung des Cuntze Versagenskriteriums fünf Materialfestigkeiten, die durch statische Versuche zu bestimmen sind. Dabei handelt es sich um Zug- sowie Druckfestigkeiten parallel und quer zur Faserrichtung einer UD-Lage, sowie die Scherfestigkeit des Laminats. Zur Bestimmung dieser Größen ist ein homogener, möglichst nur aus der zu untersuchenden Spannung bestehender Belastungszustand anzustreben [1,7].

Zur Bestimmung der Zugfestigkeiten kann das Verfahren in der EN ISO 527-5 herangezogen werden. Eigenschaften in Faserrichtung können unter Anwendung der DIN EN 2561 und quer zur Faserrichtung anhand DIN EN 2597 bestimmt werden. Da im Rahmen dieser Versuche lediglich ein Versagen in gewissem Abstand von der Lasteinleitung sicherzustellen ist und beispielsweise seitliches Ausweichen der Probe nicht berücksichtigt werden muss, ist die Durchführung der Festigkeitsbestimmung relativ einfach [7].

Mit der DIN ESO 14126 ist die Bestimmung der Druckeigenschaften parallel sowie senkrecht zur Faserrichtung eines UD-Laminats möglich. Alternativ bietet die DIN EN 2850 eine Methode zur Ermittlung der faserparallelen Eigenschaften. Bei der Bestimmung der Druckeigenschaften ist besonderes Augenmerk auf die Stabilität des Probekörpers zu legen. Strenggenommen stellt die Bestimmung des Druckkennwerts einen Mikrostabilitätskennwert dar, da Versagen auf mikromechanischer Ebene durch ein seitliches Ausweichen der Fasern mit resultierendem Materialversagen eintritt. Werden jedoch homogenisierte Lagenfestigkeiten betrachtet, kann der so ermittelte Kennwert als Grenze der Festigkeit verwendet werden [7].

Für die Bestimmung der Schubfestigkeit wird aufgrund seines einfachen Aufbaus häufig auf den $\pm 45^\circ$ -Zugversuch nach DIN EN 6031 oder DIN EN ISO 14129 zurückgegriffen. Weitere Methoden zur Bestimmung der Schubfestigkeit sind der nicht genormte 10° -off-axis-Zugversuch, der Iospecu-Schubversuch sowie die Abscherversuche Double-Notch nach ASTM D3846 oder der Rail-Shear nach ASTM D4255 [7].

Zur Bestimmung der Cuntze Parameter $\mu_{\perp\parallel}$ und $\mu_{\perp\perp}$ kann der ARCAN Versuchsaufbau herangezogen werden. Ein einachsiger Versuchsaufbau ermöglicht die Bestimmung des Cuntze Reibparameters $\mu_{\perp\perp}$ aus dem Bruchwinkel im Versuch. Der bi-axiale ARCAN-Aufbau kann dazu genutzt werden, Spannungszustände in den Moden IFF2 und IFF3 zu erzeugen, um die Reibparameter $\mu_{\perp\parallel}$ und $\mu_{\perp\perp}$ aus dem vorliegenden Spannungszustand zu ermitteln [1,7].

Der Interaktionsexponent m kann durch Versuche in einem Zwei-Mode-Bereich durch Curve-Fitting abgeschätzt werden. Die Erfahrung zeigt, dass Werte zwischen 2.5 und 3 eine hohe Vorhersagegenauigkeit versprechen. Dabei führt ein kleinerer Wert für m aufgrund der kleineren Versagensspannungen zu konservativen Ergebnissen [1].

Eine umfassende Betrachtung experimenteller Versuche hinsichtlich ihrer Eignung zur Bestimmung der Materialkennwerte für das Cuntze Kriterium kann Petersen et al. [1] und Petersen [7] entnommen werden.

3. Implementierung des Cuntze Kriteriums in 2D

Die Implementierung des Cuntze Kriteriums für den ebenen Spannungszustand (2D) erfolgt in der Programmiersprache Python. Für die Darstellung der Bruchkurven und des Bruchkörpers werden eine Reihe mathematischer Umformungen benötigt. Die mathematischen Formulierungen, die für die Visualisierung der Bruchkurven sowie des Bruchkörpers erforderlich sind, sollen in diesem Abschnitt hergeleitet und erläutert werden.

3.1. Das Cuntze Kriterium für den ebenen Spannungszustand

In Abschnitt 2.2 wurden die Grundgleichungen des Cuntze Versagenskriteriums für den ebenen Spannungszustand in 2D und für ein Kontinuum in 3D eingeführt. Die GUI ist auf den Fall des ebenen Spannungszustandes beschränkt, so dass im Folgenden nur der 2D Fall betrachtet wird. In Tabelle 3-1) werden die Parameter, wie sie im Code verwendet werden, aufgelistet und erläutert, um eine einheitliche Notation zu gewährleisten.

Tabelle 3-1 Übersicht der erforderlichen Größen für das Cuntze Kriterium

Symbol	Einheit	Bedeutung
σ_1	N/mm^2	Längsspannung
σ_2	N/mm^2	Querspannung
τ_{21}	N/mm^2	Schubspannung
$R(1,t)$	N/mm^2	Längszugfestigkeit X_T
$R(1,c)$	N/mm^2	Längsdruckfestigkeit X_C
$R(2,t)$	N/mm^2	Querzugfestigkeit Y_T
$R(2,c)$	N/mm^2	Querdruckfestigkeit Y_C
$R(2,1)$	N/mm^2	Scherfestigkeit S
m	—	Interaktionsexponent
μ_{21}	—	Reibparameter
$Eff(i)$	N/mm^2	Materialanstrengung in Mode i $i \in [FF1, FF2, IFF1, IFF2, IFF3]$
RF	—	Reservefaktor

Die Versagensbedingungen des Cuntze Kriteriums ergeben sich für die neue Notation zu:

$$E_{ff}(FF1) = \frac{\sigma_1}{R(1,t)}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0$$

$$E_{ff}(FF2) = \frac{\sigma_1}{R(1, c)}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0$$

$$E_{ff}(IFF1) = \frac{\sigma_2}{R(2, t)}, \quad \text{für } \sigma_2 \geq 0$$

$$E_{ff}(IFF2) = \frac{\sigma_2}{R(2, c)}, \quad \text{für } \sigma_2 < 0$$

$$E_{ff}(IFF3) = \frac{|\tau_{21}|}{R(2, 1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2}$$

Für die globale Materialanstrengung $E_{FF}(ges)$ (Gesamtmaterialanstrengung) folgt mit dem Interaktionsexponenten m :

$$E_{ff}(ges)^m = E_{ff}(FF1)^m + E_{ff}(FF2)^m + E_{ff}(IFF1)^m + E_{ff}(IFF2)^m + E_{ff}(IFF3)^m$$

$$E_{ff}(ges) = \left[E_{ff}(FF1)^m + E_{ff}(FF2)^m + E_{ff}(IFF1)^m + E_{ff}(IFF2)^m + E_{ff}(IFF3)^m \right]^{\frac{1}{m}}$$

3.2. Bestimmung der Bruchkurven (2D)

Im zweidimensionalen Fall können drei Bruchebenen betrachtet werden. Dabei werden jeweils zwei Spannungen unter Vernachlässigung der dritten Spannungsgröße gegeneinander in ein Diagramm aufgetragen. Die Bruchkurven zu den drei Bruchebenen $\tau_{21} = f(\sigma_1)$, $\tau_{21} = f(\sigma_2)$ und $\sigma_2 = f(\sigma_1)$ werden im Folgenden hergeleitet, damit die Formeln später für die Visualisierung der Kurven in der GUI herangezogen werden können.

3.2.1. Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_1)$

In der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ wird die Schubspannung τ_{21} über der Längsspannung σ_1 aufgetragen. Um die Abhängigkeit dieser Größen mathematisch formulieren zu können, werden für den Zug- und Druckfall zwei Versagensbedingungen aufgestellt:

$$E_{ff}(FF1) + E_{ff}(IFF3) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0$$

$$E_{ff}(FF2) + E_{ff}(IFF3) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 < 0$$

Durch Umformen erhält man die Abhängigkeit $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ für den Zug- und Druckfall:

$$\tau_{21} = (R(2,1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0$$

$$\tau_{21} = (R(2,1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0$$

Da in dieser Bruchebene jedoch lediglich die Abhängigkeit zwischen Schub- und Längsspannung betrachtet werden soll, wird die Komponente der Querspannung vernachlässigt ($\sigma_2 = 0$). Die mathematische Beschreibung für die Bruchkurve in der Ebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ vereinfacht sich somit zu:

$$\tau_{21} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0$$

$$\tau_{21} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0$$

Dabei sind die Gleichungen für das Intervall $[R(1,c), R(1,t)]$ gültig. In Abbildung 3-1 ist die Bruchkurve für das Material T700/M21 aus Tabelle 3-2 in der Ebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ dargestellt.

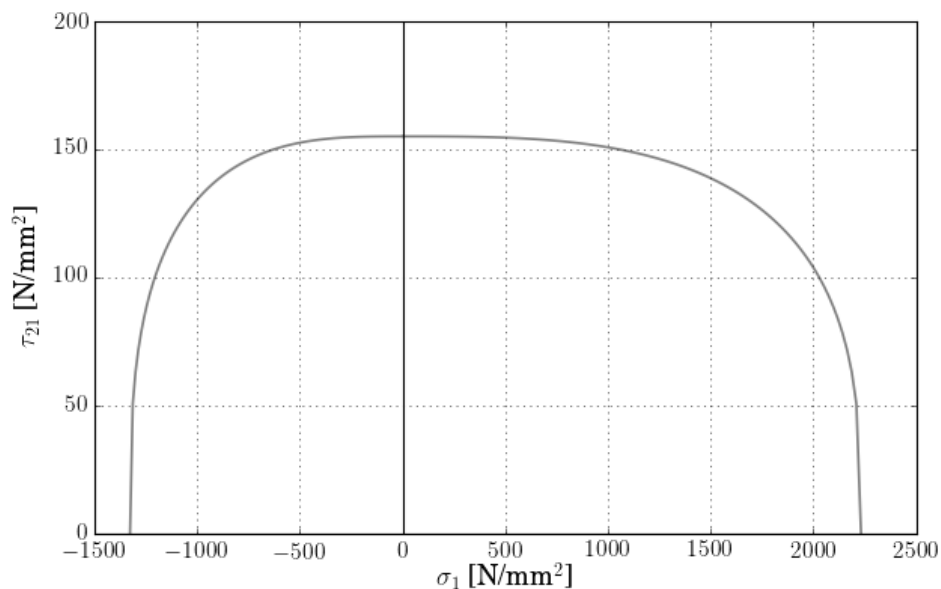


Abbildung 3-1 Bruchkurve für T700/M21 in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$

Tabelle 3-2 Materialdaten für T700/M21 [4]

Symbol	Einheit	Wert
$R(1, t)$	N/mm^2	2232,3
$R(1, c)$	N/mm^2	-1327
$R(2, t)$	N/mm^2	71
$R(2, c)$	N/mm^2	-201,6
$R(2, 1)$	N/mm^2	155,2
m	-	3,1
μ_{21}	-	0,125

3.2.2. Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_2)$

Für die Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$ werden die Versagensmoden IFF1, IFF2 und IFF3 für die Formulierung der Bruchkurve verwendet. Dabei lautet die Versagensbedingung für diese Ebene:

$$E_{ff}(IFF1) + E_{ff}(IFF3) = 1, \quad \text{für } \sigma_2 \geq 0$$

$$E_{ff}(IFF2) + E_{ff}(IFF3) = 1, \quad \text{für } \sigma_2 < 0$$

Durch Einsetzen und Auflösen nach der Schubspannung erhält man die mathematischen Formulierungen für die Bruchkurve in der Ebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$. Die Gleichungen unterscheiden auch hier zwischen Zug- und Druckbelastung in Querrichtung und sind für das Intervall $[R(2, c), R(2, t)]$ gültig.

$$\tau_{21} = (R(2, 1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_2 \geq 0$$

$$\tau_{21} = (R(2, 1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_2 < 0$$

In Abbildung 3-2 ist die Bruchkurve für das Material T700/M21 aus Tabelle 3-2 in der Ebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$ dargestellt.

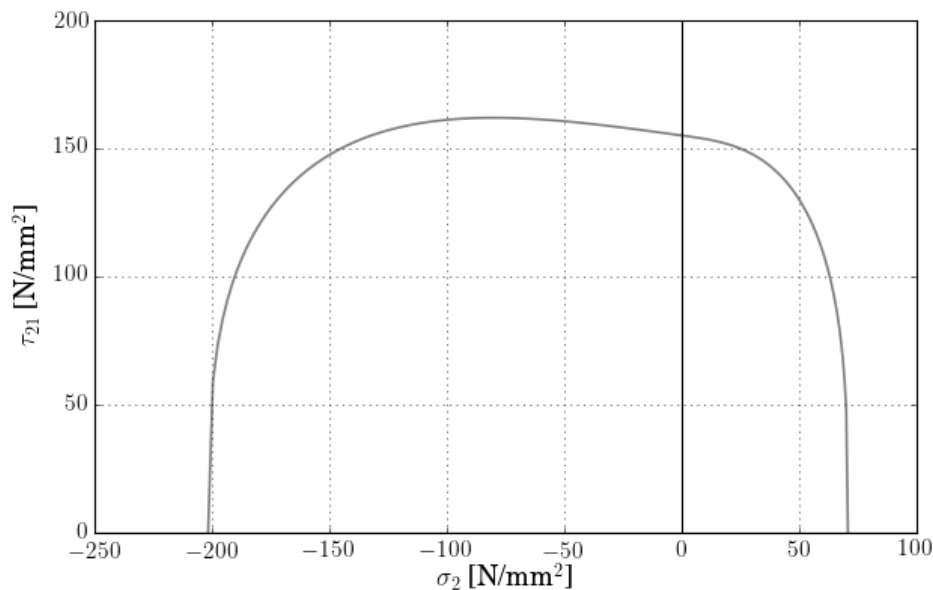


Abbildung 3-2 Bruchkurve für T700/M21 in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$

3.2.3. Bruchkurve $\sigma_2 = f(\sigma_1)$

Die Bestimmung der Bruchkurve für die Bruchebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$ erfolgt mit den Versagensmoden FF1, FF2, IFF1 und IFF2. Aufgrund der Fallunterscheidung zwischen Zug- und Druckspannungen in Längs- sowie in Querrichtung, beschreiben insgesamt vier Versagensbedingungen die Bruchkurve:

$$E_{ff}(FF1) + E_{ff}(IFF1) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0$$

$$E_{ff}(FF2) + E_{ff}(IFF1) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0$$

$$E_{ff}(FF1) + E_{ff}(IFF2) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 < 0$$

$$E_{ff}(FF2) + E_{ff}(IFF2) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0$$

Die mathematische Formulierung der Bruchkurve ist für das Intervall $[R(1, c), R(1, t)]$ gültig und ergibt sich durch Einsetzen und Auflösen der vier Versagensbedingungen:

$$\sigma_2 = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0$$

$$\sigma_2 = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_2 = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0$$

$$\sigma_2 = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0$$

In Abbildung 3-3 ist die Bruchkurve für das Material T700/M21 aus Tabelle 3-2 in der Ebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$ dargestellt.

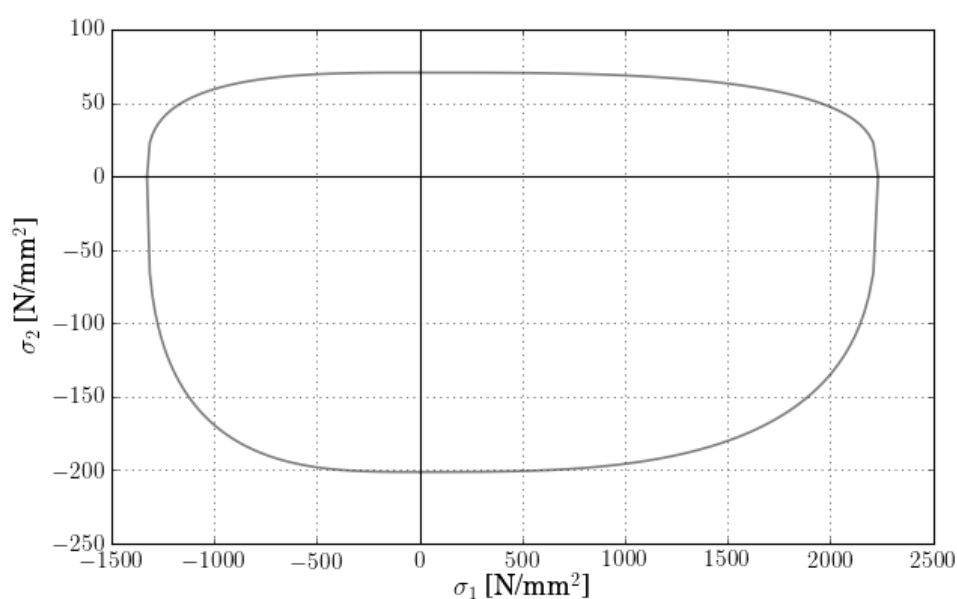


Abbildung 3-3 Bruchkurve für T700/M21 in der Bruchebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$

3.3. Bestimmung des Bruchkörpers (2D)

Der Bruchkörper zum Cuntze Kriterium für den ebenen Spannungszustand entsteht durch die Interaktion aller Spannungsgrößen. Der zweidimensionale Spannungszustand kann dabei durch ein dreidimensionales Diagramm visualisiert werden. Die Bruchebenen aus Abschnitt 3.2 finden sich im dreidimensionalen Bruchkörper wieder. Die Ebene, die durch die Achsen τ_{21} und σ_1 aufgespannt wird, ergibt unter der Randbedingung $\sigma_2 = 0$ die Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ aus dem vorangegangenen Abschnitt. Dasselbe gilt für die Ebenen $\tau_{21} - \sigma_2$ und $\sigma_2 - \sigma_1$, die mit den Randbedingungen $\sigma_1 = 0$ bzw. $\tau_{21} = 0$, die Bruchflächen $\tau_{21} = f(\sigma_2)$ und $\sigma_2 = f(\sigma_1)$ beschreiben.

Um die Interaktion der Spannungen korrekt einfangen zu können, erfolgt die Bestimmung der Punkte auf der Oberfläche des Bruchkörpers in zwei Stufen. Der Bruchkörper wird auf der Ebene $\sigma_1 - \sigma_2$ aufgespannt und ist daher im Intervall $\sigma_1 = [R(1, c), R(1, t)]$ und $\sigma_2 = [R(2, c), R(2, t)]$ gültig. Die mathematische Beschreibung des Bruchkörpers erfolgt mit dem folgenden funktionalen Zusammenhang:

$$\tau_{21} = f(\sigma_1, \sigma_2(\sigma_1), \tau_{21}(\sigma_1))$$

Bei der Beschreibung des Bruchkörpers wird zwischen Zug- und Druckbelastung in Längs- und Querrichtung unterschieden. Des Weiteren wird die Interaktion der Versagensmoden und die daraus resultierende Festigkeitsreduzierung mit Hilfe der Variablen $\tau_{21,var}$ und $\sigma_{2,var}$ berücksichtigt. Dabei resultiert $\tau_{21,var}$ durch die Bedingung

$$E_{ff}(FF1) + E_{ff}(IFF3) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0, \text{ bzw.}$$

$$E_{ff}(FF2) + E_{ff}(IFF3) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 < 0$$

und beschreibt die Reduzierung der Scherfestigkeit $R(2,1)$. Somit ist der Einfluss der Versagensmoden FF1 und FF2 auf IFF3 erfasst. Der Einfluss der Längsspannung σ_1 auf die Querfestigkeit und somit der Einfluss der Moden FF1 und FF2 auf IFF1 und IFF2 werden mit Hilfe der Variable $\sigma_{2,var}$ berücksichtigt. Es ergeben sich vier Bedingungen

$$E_{ff}(FF1) + E_{ff}(IFF1) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0,$$

$$E_{ff}(FF2) + E_{ff}(IFF1) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0,$$

$$E_{ff}(FF1) + E_{ff}(IFF2) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 < 0,$$

$$E_{ff}(FF2) + E_{ff}(IFF2) = 1, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0,$$

die genutzt werden, um den Einfluss auf die Querkzug- bzw. Querdruckfestigkeit zu ermitteln. Die so abhängig vom Lastfall ermittelten Hilfsgrößen $\tau_{21,var}$ und $\sigma_{2,var}$ ersetzen die Festigkeiten $R(2,1)$ und $R(2, c)$ bzw. $R(2, t)$. Der dreidimensionale Bruchkörper für das Cuntze Kriterium im ebenen Spannungszustand setzt sich aus den folgenden vier Elementen der Schubspannung zusammen. Dabei werden im ersten Schritt die Hilfsgrößen $\tau_{21,var}$ und $\sigma_{2,var}$ bestimmt und diese in einem zweiten Schritt in die Gleichung zur Bestimmung der Schubspannung eingesetzt.

Für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ gilt für die Bruchkurve

$$\tau_{21} = (\tau_{21,var} - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,var}}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

mit

$$\tau_{21,var} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

und

$$\sigma_{2,var} = R(2,t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 < 0$ gilt für die Bruchkurve

$$\tau_{21} = (\tau_{21,var} - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,var}}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

mit

$$\tau_{21,var} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

und

$$\sigma_{2,var} = R(2,c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ gilt für die Bruchkurve

$$\tau_{21} = (\tau_{21,var} - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,var}}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

mit

$$\tau_{21,var} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

und

$$\sigma_{2,var} = R(2,t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 < 0$ gilt für die Bruchkurve

$$\tau_{21} = (\tau_{21,var} - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,var}}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

mit

$$\tau_{21,var} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

und

$$\sigma_{2,var} = R(2,c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Die Darstellung des Bruchkörpers für das Material T700/M21 erfolgt in Abbildung 3-4.

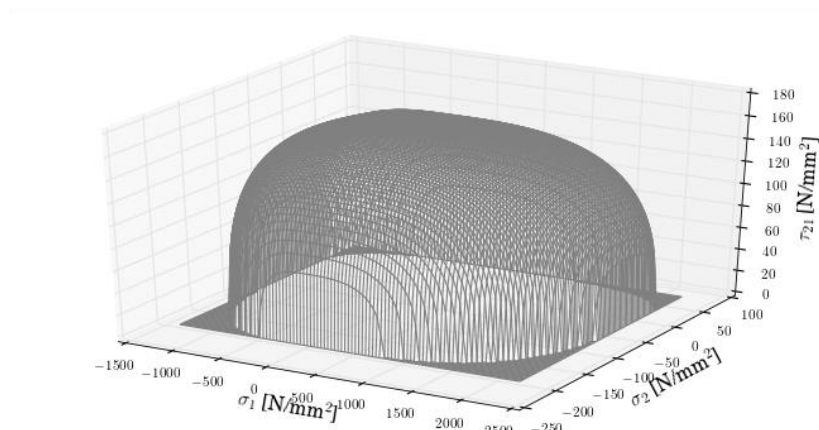


Abbildung 3-4 Bruchkörper für das Material T700/M21

3.4. Visualisierung des Belastungsvektors in den Bruchebenen

Eine der Anforderungen an die grafische Benutzeroberfläche ist die Möglichkeit zur Visualisierung eines Belastungsvektors bei der Überprüfung nutzerdefinierter Lastfälle in den Bruchebenen $\tau_{21} = f(\sigma_1)$, $\tau_{21} = f(\sigma_2)$ und $\sigma_2 = f(\sigma_1)$. Die Nutzereingabe $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ wird dabei durch einen Vektor in der Darstellung der entsprechenden Bruchebene dargestellt. Weiterhin erfolgt eine Projektion des Vektors auf die Bruchkurve, wie in Abbildung 3-5 zu sehen ist. Der auf diese Weise ermittelte Punkt auf der Bruchkurve kann in der Folge für die Bestimmung der Materialanstrengung sowie des Reservefaktors herangezogen werden.

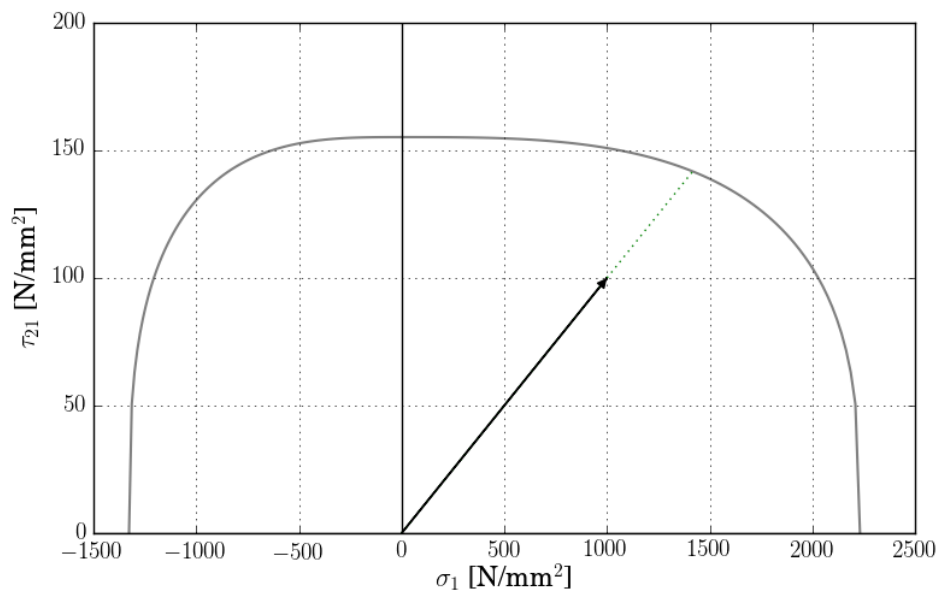


Abbildung 3-5 Darstellung des Belastungsvektors ($\sigma_1^{BV}, \tau_{21}^{BV}$) sowie der Projektion auf die Bruchkurve in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ am Beispiel des Materials T700/M21

3.4.1. Projektion auf die Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_1)$

Die Projektion des Belastungsvektors auf die Bruchkurve erfordert die Kenntnis des Schnittpunkts der Verlängerung des Belastungsvektors mit der Bruchkurve. Dieser Schnittpunkt wird für die Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ analytisch bestimmt. Dazu wird die Steigung des Belastungsvektors in Abbildung 3-5 herangezogen, um eine Gerade in der Form $mx + b$ für $\sigma_1 \geq 0$ (bzw. $-mx + b$ für $\sigma_1 < 0$) durch den Belastungsvektor zu legen, wobei die Konstante b stets den Wert 0 hat. Die Steigung m lässt sich für diesen Fall stets mit den Größen des Belastungsvektors bestimmen: $m = \tau_{21}^{BV} / \sigma_1^{BV}$. Gleichzeitig wird die Bruchkurve durch

$$\tau_{21} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0$$

bzw.

$$\tau_{21} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0$$

beschrieben. Durch Gleichsetzen der Geradengleichung mit der Beschreibung der Bruchkurve und Auflösen nach der σ_1 -Komponente kann der Schnittpunkt auf der Bruchkurve $\sigma_{1,BK}$ analytisch bestimmt werden:

$$\sigma_{1,BK} = \frac{R(2,1)}{\left[\left(\frac{R(2,1)}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{\tau_{21}^{BV}}{\sigma_1^{BV}} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} \geq 0$$

$$\sigma_{1,BK} = \frac{R(2,1)}{\left[\left(-\frac{R(2,1)}{R(1,t)} \right)^m + \left(-\frac{\tau_{21}^{BV}}{\sigma_1^{BV}} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} < 0$$

Mit der σ_1 -Komponente des Schnittpunkts $\sigma_{1,BK}$ lässt sich die τ_{21} -Komponente des Schnittpunkts wie folgt berechnen:

$$\tau_{21,BK} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,BK}}{R(1,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_{1,BK} \geq 0$$

$$\tau_{21,BK} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,BK}}{R(1,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_{1,BK} < 0$$

Somit ergibt sich der Schnittpunkt auf der Bruchkurve - und damit der Endpunkt der Projektion - zu $(\sigma_{1,BK}, \tau_{21,BK})$. Der Anfangspunkt der Projektion ist durch den Endpunkt des Belastungsvektors vorgegeben.

3.4.2. Projektion auf die Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_2)$

Die Berechnung des projizierten Punktes auf der Bruchkurve für die Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$ erfolgt geometrisch, da für diese Ebene keine eindeutige analytische Lösung vorliegt. Die Bruchkurve $\tau_{21} = f(\sigma_2)$, beschrieben durch

$$\tau_{21} = (R(2,1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_2 \geq 0$$

bzw.

$$\tau_{21} = (R(2,1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_2 < 0,$$

wird im Intervall $[R(2,c), R(2,t)]$ mit der Schrittweite 0,0001 bestimmt. Gleichzeitig wird eine Gerade in der Form $mx + b$ für $\sigma_2 \geq 0$ (bzw. $-mx + b$ für $\sigma_2 < 0$) und $b = 0$ mit einer Schrittweite von 0,0001 durch den Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Die Steigung m lässt sich wie in Abschnitt mit Hilfe des Belastungsvektors bestimmen: $m = \tau_{21}^{BV} / \sigma_2^{BV}$. Als Schnittpunkt $(\sigma_{1,BK}, \tau_{21,BK})$ wird der Punkt im betrachteten Intervall festgelegt, an dem der Abstand zwischen den beiden Graphen minimiert ist.

Diese Art der Bestimmung des projizierten Punktes auf der Bruchkurve ist stets mit einem Fehler behaftet, der insbesondere in Kurvenabschnitten mit großer Steigung unter Umständen nicht vernachlässigbar ist. Die gewählte Schrittweite von 0,0001 soll auch bei großen Steigungen eine möglichst geringe Ungenauigkeit sicherstellen. Bei Bedarf kann die Schrittweite weiter reduziert werden, um die Genauigkeit zu erhöhen.

3.4.3. Projektion auf die Bruchkurve $\sigma_2 = f(\sigma_1)$

Die Projektion des Belastungsvektors auf die Bruchkurve $\sigma_2 = f(\sigma_1)$ erfolgt auf dieselbe Weise, wie in Abschnitt 3.4.1 bereits erläutert. Da in der vorliegenden Bruchebene sowohl die Komponente der Abszisse σ_1 als auch die Komponente der Ordinate σ_2 positive und negative Werte annehmen können, liegen insgesamt vier Formeln zur Bestimmung der σ_1 -Komponente des Schnittpunkts auf der Bruchkurve vor:

$$\sigma_{1,BK} = \frac{R(2, t)}{\left[\left(\frac{\sigma_2^{BV}}{\sigma_1^{BV}} \right)^m + \left(\frac{R(2, t)}{R(1, t)} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} \geq 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} \geq 0$$

$$\sigma_{1,BK} = - \frac{R(2, c)}{\left[\left(-\frac{\sigma_2^{BV}}{\sigma_1^{BV}} \right)^m + \left(-\frac{R(2, c)}{R(1, t)} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} \geq 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} < 0$$

$$\sigma_{1,BK} = - \frac{R(2, t)}{\left[\left(-\frac{\sigma_2^{BV}}{\sigma_1^{BV}} \right)^m + \left(-\frac{R(2, t)}{R(1, c)} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} < 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} \geq 0$$

$$\sigma_{1,BK} = \frac{R(2, c)}{\left[\left(-\frac{\sigma_2^{BV}}{\sigma_1^{BV}} \right)^m + \left(-\frac{R(2, c)}{R(1, c)} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} < 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} < 0$$

Die σ_2 -Komponente des Schnittpunkts auf der Bruchkurve erhält man durch Einsetzen von $\sigma_{1,BK}$ in eine der folgenden Gleichungen, abhängig vom Vorzeichen der Elemente des Belastungsvektors ($\sigma_1^{BV}, \sigma_2^{BV}$).

$$\sigma_{2,BK} = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,BK}}{R(1, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} \geq 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} \geq 0$$

$$\sigma_{2,BK} = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,BK}}{R(1, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} \geq 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} < 0$$

$$\sigma_{2,BK} = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,BK}}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} < 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} \geq 0$$

$$\sigma_{2,BK} = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,BK}}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{für } \sigma_1^{BV} < 0 \text{ und } \sigma_2^{BV} < 0$$

3.5. Bestimmung der Materialanstressungen und Reservefaktoren

An dieser Stelle werden die Reservefaktoren sowie die Faktoren zur Beschreibung der Materialanstressung für die verschiedenen Bruchebenen eingeführt.

3.5.1. Reservefaktor in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$

Der Reservefaktor RF ist wie folgt definiert:

$$RF = \frac{\sqrt{\sigma_{1,BK}^2 + \tau_{21,BK}^2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_{21}^2}}$$

Dabei beschreiben σ_1 und τ_{21} den durch den Nutzer eingegebenen Lastfall, während $\sigma_{1,BK}$ und $\tau_{21,BK}$ die Projektion des Belastungsvektors auf die Bruchkurve darstellen. Anschaulich lässt sich der Reservefaktor als Quotient aus der Länge der Projektion $\overline{(0,0)(\sigma_{1,BK}, \tau_{21,BK})}$ und des Belastungsvektors $\overline{(0,0)(\sigma_1, \tau_{21})}$ beschreiben.

3.5.2. Anstrengung in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$

Die Anstrengung AF in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$ setzt sich aus den Anstrengungen $E_{ff}(FF1)$, $E_{ff}(FF2)$ sowie $E_{ff}(IFF3)$ zusammen:

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m + \left(\frac{\tau_{21}}{R(2, 1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0$$

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m + \left(\frac{\tau_{21}}{R(2, 1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0$$

3.5.3. Reservefaktor in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$

Der Reservefaktor RF ist wie folgt definiert:

$$RF = \frac{\sqrt{\sigma_{2,BK}^2 + \tau_{21,BK}^2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \tau_{21}^2}}$$

3.5.4. Anstrengung in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$

Die Anstrengung AF in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_2)$ setzt sich aus den Anstrengungen $E_{ff}(IFF1)$, $E_{ff}(IFF2)$ sowie $E_{ff}(IFF3)$ zusammen:

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{\tau_{21}}{R(2,1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_2 \geq 0$$

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m + \left(\frac{\tau_{21}}{R(2,1) - \mu_{21} \cdot \sigma_2} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_2 < 0$$

3.5.5. Reservefaktor in der Bruchebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$

Der Reservefaktor RF ist wie folgt definiert:

$$RF = \frac{\sqrt{\sigma_{1,BK}^2 + \sigma_{2,BK}^2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

3.5.6. Anstrengung in der Bruchebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$

Die Anstrengung AF in der Bruchebene $\sigma_2 = f(\sigma_1)$ setzt sich aus den Anstrengungen $E_{ff}(FF1)$, $E_{ff}(FF2)$ sowie $E_{ff}(IFF1)$ und $E_{ff}(IFF2)$

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0$$

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 < 0$$

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0$$

$$AF = \left[\left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right]^{1/m}, \quad \text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0$$

4. Grafische Benutzeroberfläche

In den vorangegangenen Abschnitten wurde das Cuntze Kriterium vorgestellt und erläutert. Weiterhin wurden das Vorgehen zur Darstellung von Bruchkurven und des Bruchkörpers sowie die Bestimmung modeweiser und globaler Materialanstressungen sowie Reservefaktoren dargestellt. Die grafische Benutzeroberfläche (engl. Graphical User Interface, GUI), dessen Aufbau in diesem Abschnitt erklärt wird, basiert auf den Herleitungen der vorangegangenen Abschnitte.

Die Entwicklung der GUI erfolgt in der pythonbasierten Grafikbibliothek Tkinter. Tkinter ist dabei strenggenommen lediglich ein Interface, das Befehle aus Python heraus an Tcl/Tk sendet und Antworten empfängt. In Tkinter wird im Gegensatz zu anderen Grafikbibliotheken kein vorbereitetes GUI-Layout eingebunden. Der Aufbau eines Fensters wird durch Einfügen einzelner Elemente, den sog. Widgets, mit Hilfe von Python-Befehlen beschrieben. Dazu wird zunächst die Bibliothek Tkinter (in Python 3 heißt sie tkinter) eingebunden. In einem weiteren Schritt wird ein Hauptfenster erzeugt, das sog. Root Window, in das alle weiteren Widgets integriert werden. Mit Hilfe eines Packers wird jedes Widget in das Root Window gesetzt. Ein so erstelltes Programm läuft nicht mehr streng nach dem Programmtext, sondern ist durch die Benutzereingabe gesteuert. In der Folge tritt anstelle eines linearen Programmflusses der Wechsel zwischen unterschiedlichen Zuständen des Programms innerhalb der Hauptschleife. Die unterschiedlichen Zustände werden dabei durch die Interaktion des Nutzers über die Widgets definiert [6].

In Abbildung 4-1 ist die GUI für das Cuntze Kriterium im ebenen Spannungszustand (2D) dargestellt. Die Kopfzeile enthält den Titel, das DLR-Logo sowie die Information über die Version der vorliegenden GUI. Unterhalb der Kopfzeile sind drei Blöcke zu sehen: ‚Dateneingabe‘, ‚Anstressungen‘ und ‚Versagensmodi nach Cuntze‘. Wie die Namen vermuten lassen, erfolgt im ersten Block die Eingabe der Materialdaten. Im zweiten Block können Materialanstressungen nach Cuntze bestimmt werden, während der dritte Block eine Übersicht der Versagensmodi nach Cuntze bereitstellt, um dem Nutzer die Interpretation der Informationen zu erleichtern. Zwischen dem Block ‚Versagensmodi nach Cuntze‘ und der Kopfzeile ist ein Hilfe-Button zu sehen. Durch Anklicken des Buttons öffnet sich ein PDF-Dokument mit einer Dokumentation zur GUI. Die Dokumentation ist eine kompakte Sammlung der der GUI zugrundeliegenden Formeln und enthält eine Anleitung zur Bedienung der einzelnen Funktionalitäten der GUI. Die untere Hälfte der GUI ist der ‚Diagramme‘-Bereich und in 4 Tabs unterteilt. Während die ersten drei Tabs die Bruchkurven in den Bruchebenen des 2D Spannungszustands enthalten, ist im vierten Tab der dreidimensionale Bruchkörper visualisiert. In den folgenden Abschnitten werden die Funktionalitäten des Tools vorgestellt und erläutert.

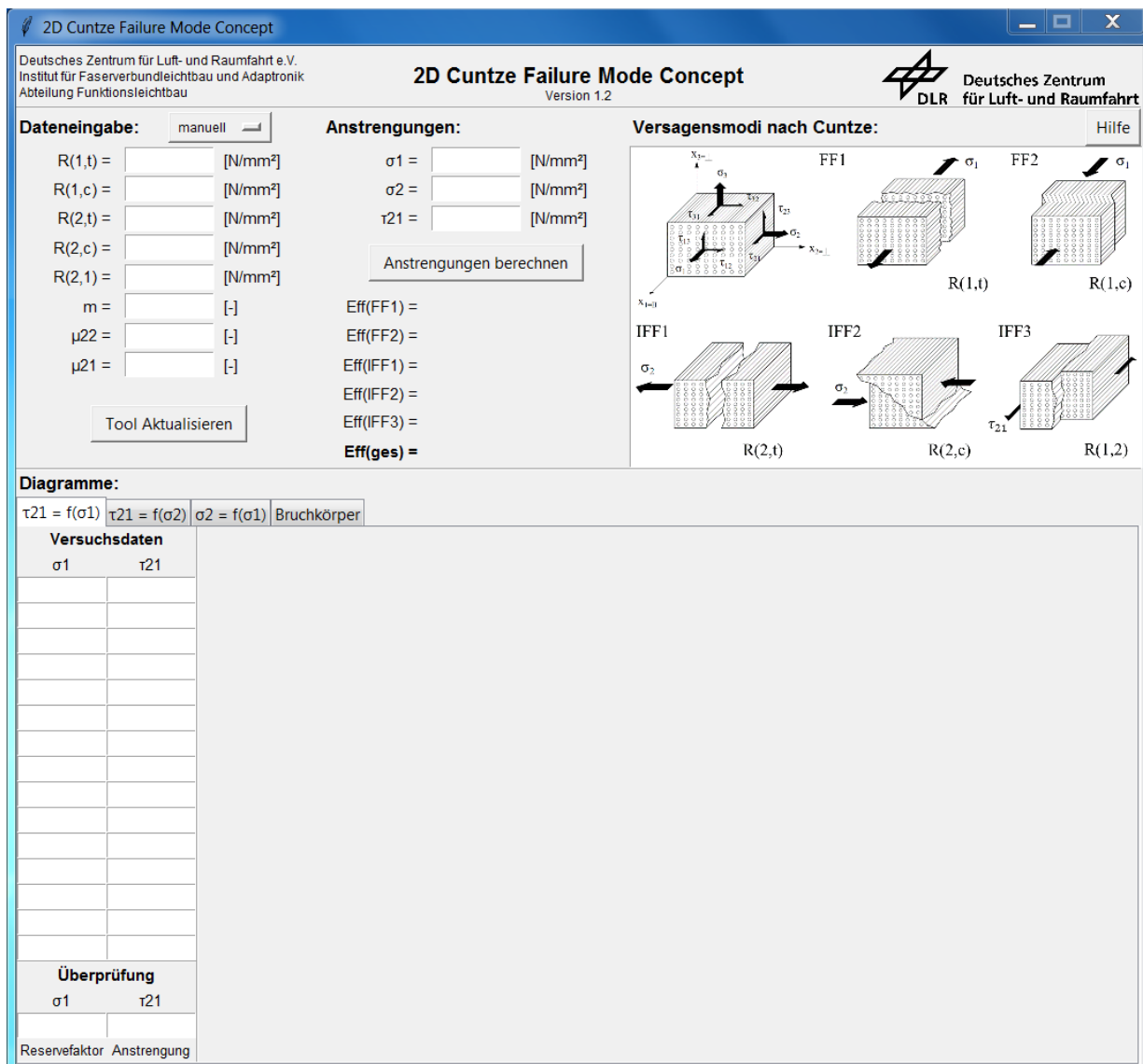


Abbildung 4-1 Grafische Benutzeroberfläche für das Cuntze Kriterium in 2D

4.1. Materialdateneingabe

Die Eingabe der Materialdaten, die für die Visualisierungen und Bestimmung der Anstrengungen sowie Reservefaktoren erforderlich sind, kann auf zwei Arten erfolgen. Wie in Abbildung 4-2 zu sehen, ist es möglich, eine manuelle Dateneingabe auszuwählen. Dabei kann der Nutzer in den Eingabeboxen im rot markierten Bereich Festigkeiten und Cuntze-Parameter beliebig definieren. Eine gültige Eingabe sind ganze Zahlen oder Dezimalzahlen, deren Dezimalstellen durch einen Punkt statt eines Komma getrennt werden. Alternativ zur manuellen Dateneingabe können Materialdaten ausgewählt werden, die im Tool hinterlegt sind. Es handelt sich dabei um Daten aus der Arbeit von Schollenberger und Petersen [4], die in Tabelle 4-1 aufgeführt werden.

4.3. Darstellung der Bruchkurven

In Abbildung 4-4 ist die Visualisierung der Bruchkurven in der GUI gezeigt. Für das unter ‚Dateneingabe‘ definierte Material werden die Bruchkurven in den Ebenen $\tau_{21} - \sigma_1$, $\tau_{21} - \sigma_2$ sowie $\sigma_2 - \sigma_1$ jeweils in den ersten drei Tabs unter ‚Diagramme‘ dargestellt. Zur erstmaligen Bestimmung der Bruchkurven ist der Button ‚Tool Aktualisieren‘ zu betätigen. Bei jeder Veränderung der Werte in der Dateneingabe ist ein wiederholtes Betätigen des ‚Tool Aktualisieren‘ Buttons erforderlich, um die Darstellung der Bruchkurven an die neuen Materialdaten anzupassen. Die Bestimmung der Bruchkurven erfolgt anhand des in Abschnitt 3.2 beschriebenen Vorgehens.

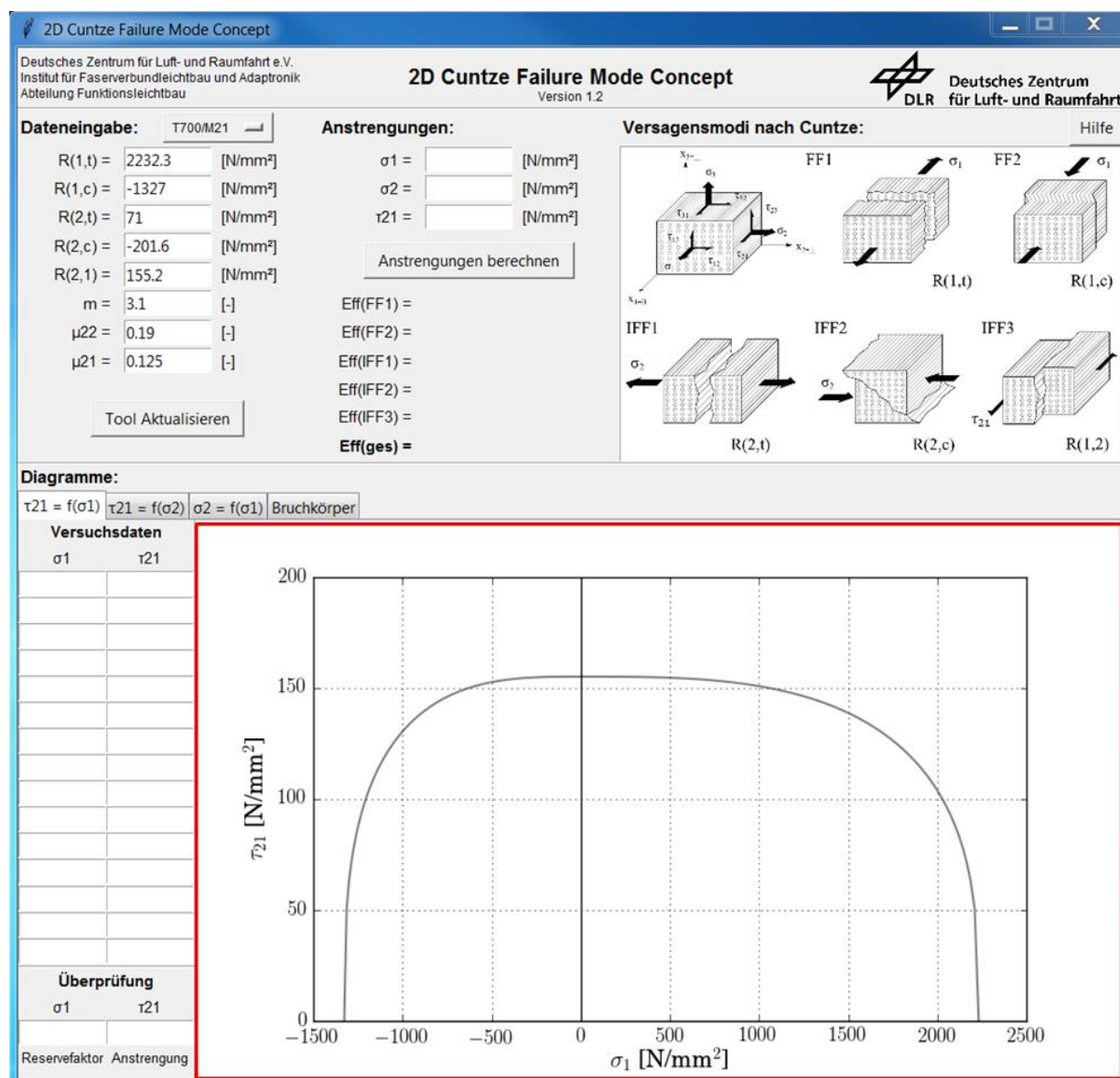


Abbildung 4-4 Grafische Benutzeroberfläche – Bruchkurven

Die Visualisierung der Bruchkurven aus Abbildung 4-4 kann um die Darstellung experimenteller Versuchsdaten sowie um die Überprüfung einer Belastung in der jeweiligen Ebene erweitert wer-

den. Für die Darstellung von Datenpunkten im Diagramm der Bruchkurven ist in jedem Tab ein Eingabebereich unter ‚Versuchsdaten‘ vorhanden. In diese Eingabeboxen können die Werte für die Größen der Abszisse und Ordinate eingetragen werden. In Abbildung 4-5 ist zu sehen, dass insgesamt 15 Datenpunkte eingetragen werden können. Für die Bruchebene $\tau_{21} - \sigma_1$ setzen sich die Punkte aus σ_1 - und τ_{21} -Komponenten zusammen. Die so eingegebenen Datenpunkte werden im Diagramm der Bruchkurve rot angezeigt.

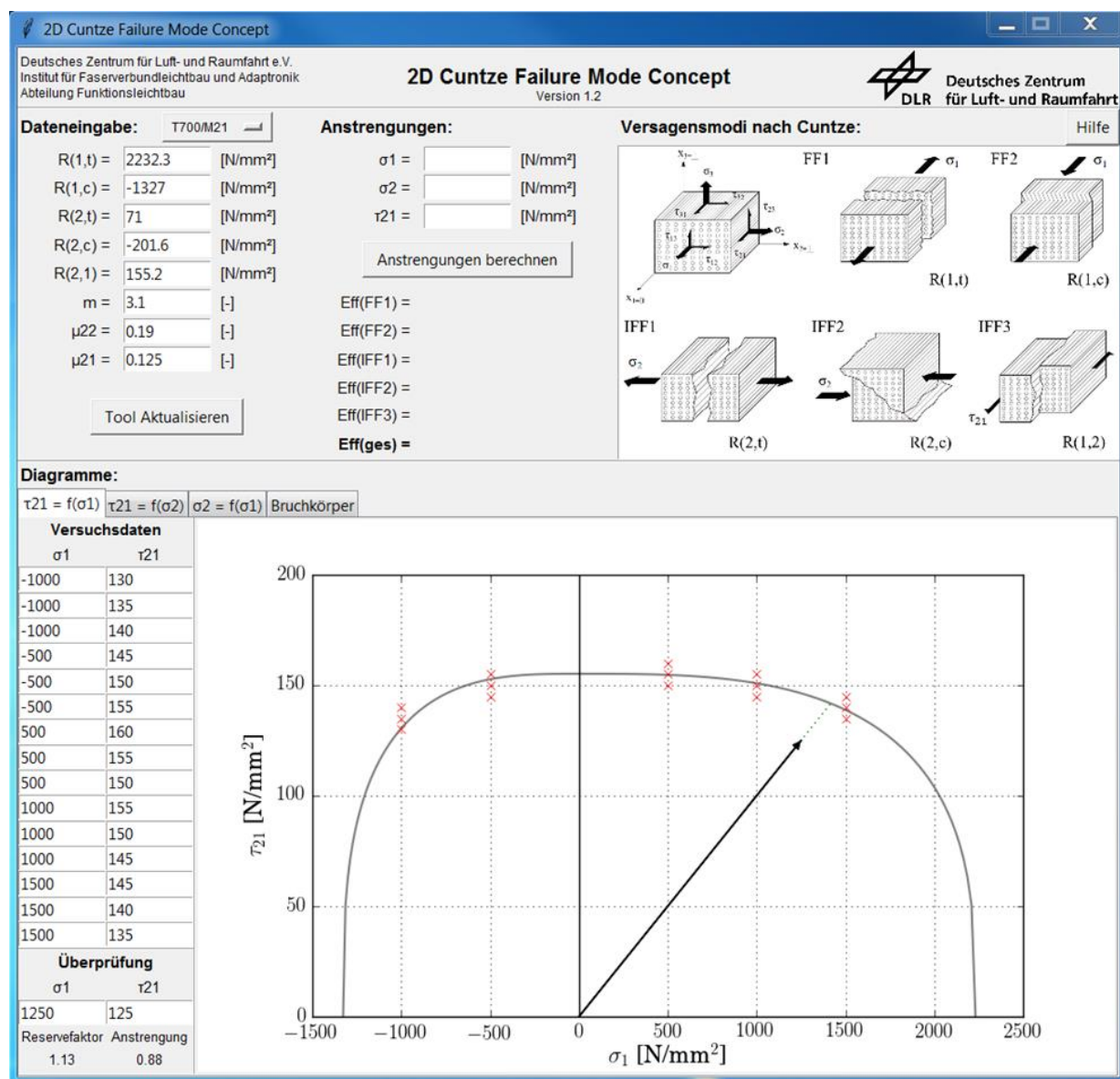


Abbildung 4-5 Grafische Benutzeroberfläche – Erweiterung der Bruchkurven

Eine weitere Funktionalität stellt die Möglichkeit zur Überprüfung von Belastungen in der jeweiligen Bruchebene dar. Unter ‚Überprüfung‘ wird dabei ein Belastungszustand in der entsprechenden Bruchebene definiert. Die Belastung wird im Diagramm der Bruchkurve als Vektor dargestellt. Befindet sich der Belastungsvektor innerhalb der Bruchkurve, so wird zusätzlich die Projektion des

Vektors auf die Bruchkurve als grüne Punktlinie angezeigt. Für die Belastung in der Ebene werden zudem die Anstrengung sowie der Reservefaktor berechnet und unterhalb des Eingabebereichs sichtbar gemacht. Die Bestimmung dieser Größen erfolgt nach den Ausführungen aus Abschnitt 3.5.

4.4. Darstellung des Bruchkörpers

Während die ersten drei Tabs unter ‚Diagramme‘ die Bruchkurven des Cuntze Kriteriums zeigen, erfolgt im vierten Tab (Abbildung 4-6) die Darstellung des dreidimensionalen Bruchkörpers, der die Interaktion aller Spannungsgrößen im ebenen Spannungszustand beschreibt. In Abschnitt 3.3 ist das Vorgehen zur Visualisierung des Bruchkörpers beschrieben.

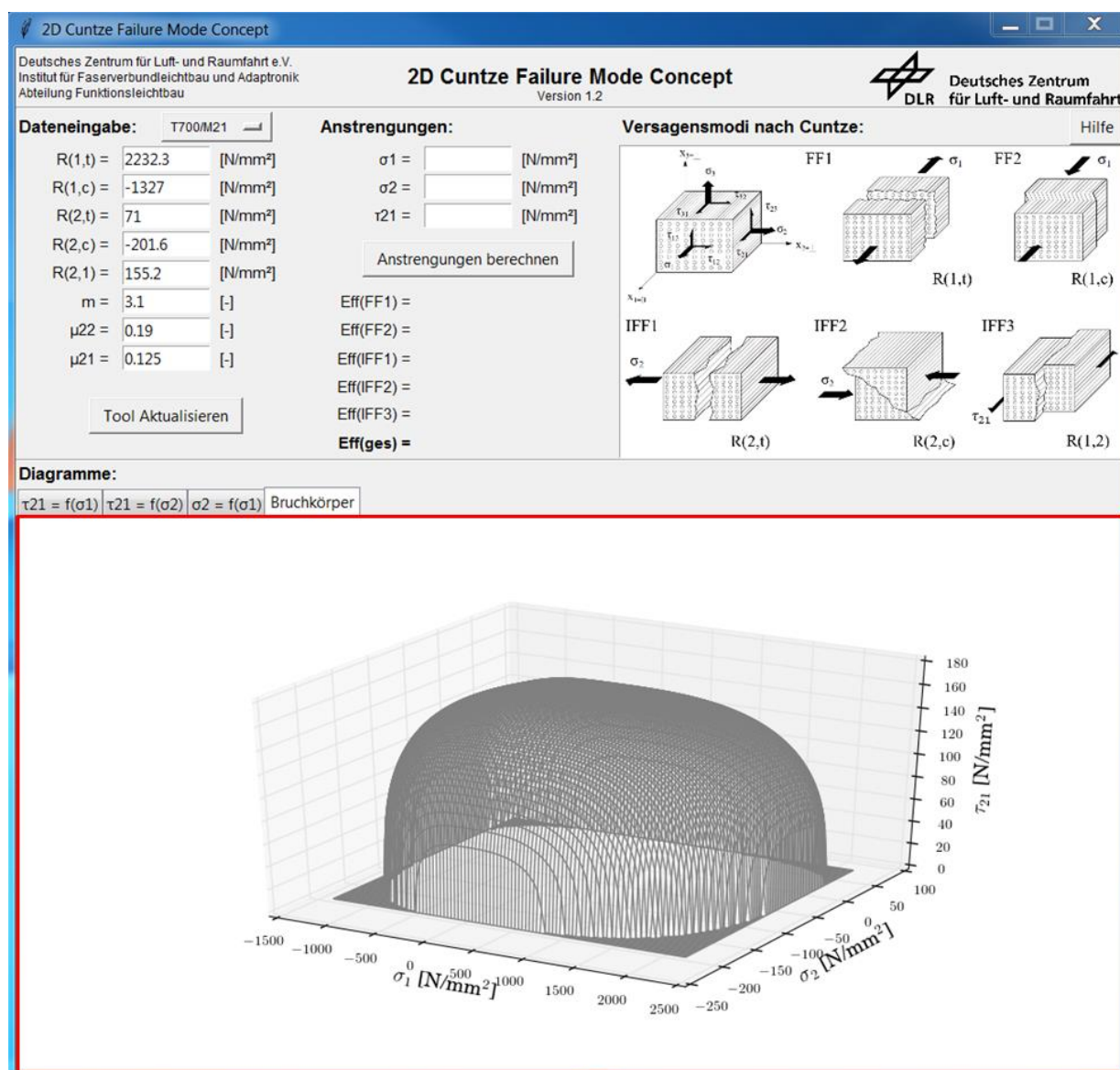


Abbildung 4-6 Grafische Benutzeroberfläche – Bruchkörper

Durch Betätigen des Buttons ‚Tool Aktualisieren‘ werden die unter ‚Dateneingabe‘ definierten Materialparameter zur Berechnung des Bruchkörpers herangezogen. Nach jeder Veränderung unter ‚Dateneingabe‘ ist der Button ‚Tool Aktualisieren‘ zu betätigen, damit die Darstellung des Bruchkörpers an die aktuelle Materialdateneingabe angepasst werden kann.

5. Zusammenfassung

In diesem Bericht werden der Aufbau und die Funktionalitäten einer grafischen Benutzeroberfläche (engl. Graphical User Interface, GUI) für das Cuntze Kriterium im ebenen Spannungszustand beschrieben. Die GUI ist in der Lage Materialanstressungen für einen benutzerdefinierten 2D-Lastfall zu berechnen, sowie Bruchkurven und den Bruchkörper im ebenen Spannungszustand darzustellen. Dabei können Materialparameter aus einer Datenbank ausgewählt oder manuell eingegeben werden. Weiterhin können Datenpunkte aus experimentellen Versuchen in den Diagrammen der Bruchkurven angezeigt, sowie Belastungen in den einzelnen Bruchebenen isoliert betrachtet werden.

Das aktuelle Tool ermöglicht dem Nutzer eine interaktive Interaktion mit dem Cuntze Kriterium für den ebenen Spannungszustand. Mit Hilfe der GUI können dabei grundlegende Charakteristika des Versagenskriteriums visualisiert werden, um komplexe Zusammenhänge zu betrachten. Durch Variation der Parameter des Cuntze Kriteriums kann zudem der Einfluss bestimmter Parameter sichtbar gemacht werden, was wiederum ein besseres Verständnis des Versagenskriteriums ermöglicht. Somit ist die GUI insbesondere für Nutzer geeignet, die das Cuntze Kriterium erstmalig behandeln und ein grundlegendes Verständnis des Kriteriums anstreben.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2-1 Spannungen eines räumlichen Kontinuums bei transversaler Isotropie	7
Abbildung 2-2 Versagensmodi für transversal-isotropes, sprödes Material	8
Abbildung 3-1 Bruchkurve für T700/M21 in der Bruchebene $\tau_{21} = f(\sigma_1)$	13
Abbildung 3-2 Bruchkurve für T700/M21 in der Bruchebene $\tau_{21} = f\sigma_1$	15
Abbildung 3-3 Bruchkurve für T700/M21 in der Bruchebene $\sigma_2 = f\sigma_1$	16
Abbildung 3-4 Bruchkörper für das Material T700/M21	19
Abbildung 3-5 Darstellung des Belastungsvektors	20
Abbildung 4-1 Grafische Benutzeroberfläche für das Cuntze Kriterium in 2D	26
Abbildung 4-2 Grafische Benutzeroberfläche – Dateneingabe	27
Abbildung 4-3 Grafische Benutzeroberfläche – Materialanstressungen	28
Abbildung 4-4 Grafische Benutzeroberfläche – Bruchkurven	29
Abbildung 4-5 Grafische Benutzeroberfläche – Erweiterung der Bruchkurven	30
Abbildung 4-6 Grafische Benutzeroberfläche – Bruchkörper	31

Tabellenverzeichnis

Tabelle 3-1 Übersicht der erforderlichen Größen für das Cuntze Kriterium	11
Tabelle 3-2 Materialdaten für T700/M21	14
Tabelle 4-1 Materialdaten für M21/T700, BSL914C/T300 und 8551-7/IM7	27

Literaturverzeichnis

- [1] E. Petersen, R. Cuntze, C. Hühne, Composite Science and Technology 134 (2016) 12-25.
- [2] R.G. Cuntze, Failure Conditions for Isotropic Materials, Unidirectional Composites, Woven Fabrics their Visualization and Links, MAN Technology AG, Augsburg, 2006.
- [3] E. Petersen, Das Cuntze Failure Mode Concept – Theorie, Interner Bericht IB 131-2013/25, DLR FA-FLB, 2013.
- [4] M. Schollenberger, E. Petersen, Das Cuntze Failure Mode Concept – Implementierung über Visual Basic in Microsoft Excel, IB 131-2014/52, DLR FA-FLB, 2014.
- [5] R.G. Cuntze, A. Freund, Composite Science and Technology 64 (2004) 343-377.
- [6] B. Klein, Einführung in Python 3, 2. Auflage, Carl Hanser Verlag München, 2014.
- [7] E. Petersen, Kritische Betrachtung der Versuchsmöglichkeiten zur Bestimmung der Elastizitätsgrößen, Festigkeits- und Reibungswerte für den transversal-isotropen Werkstoff, Interner Bericht IB 131-2013/33, DLR FA-FLB, 2013.
- [8] R.G. Cuntze, Composites Science and Technology 66 (2006) 1081-1096.